

انرژی جنبشی چرخشی

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

سرعت زاویه ای (rad/s) $\rightarrow$ K ← انرژی جنبشی (J)
 $\downarrow$
 گشتاور لختی (kg.m²)

گشتاور لختی (لختی دورانی) : مقاومت جسم در برابر تغییر حالت در حرکت چرخشی است.

✓ هرچه لختی دورانی جسم بیشتر باشد، دوران جسم دشوارتر است.

محاسبه گشتاور لختی برای دستگاهی از ذرات گسسته :

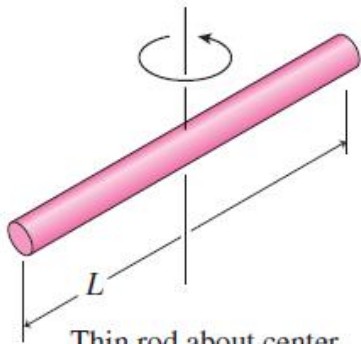
برای دستگاهی متشکل از n ذره به جرم های $m_1, m_2, \dots, m_n$ که در حال دوران حول محور ثابتی هستند، گشتاور لختی به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\text{گشتاور لختی (kg.m}^2\text{)} \leftarrow I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

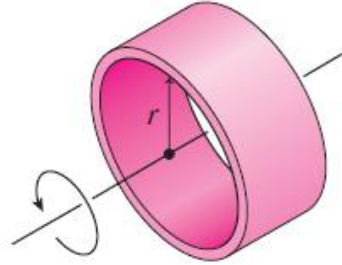
جرم ذره i ام (kg)
فاصله عمودی ذره i ام تا محور دوران (m)

گشتاور لختی اجسام پیوسته :

۳

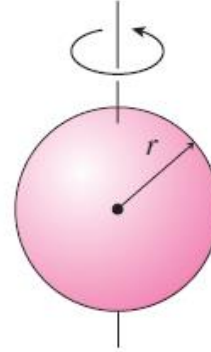


Thin rod about center
 $I = \frac{1}{12} ML^2$

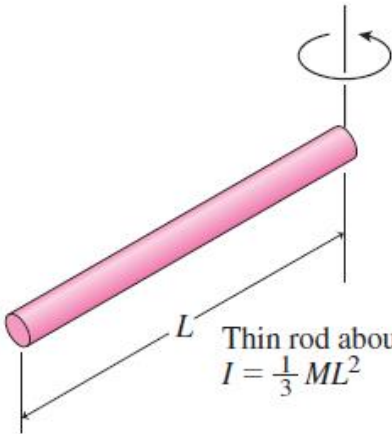
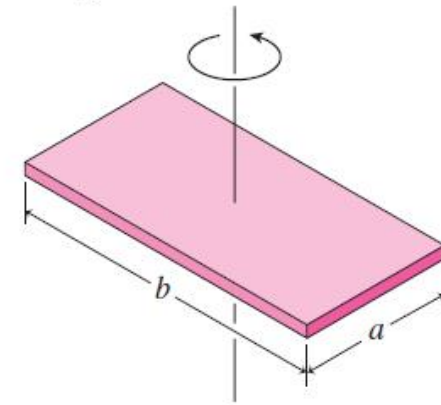


Thin ring or hollow cylinder
about its axis
 $I = MR^2$

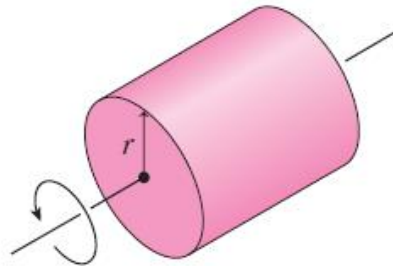
Solid sphere about diameter
 $I = \frac{2}{5} MR^2$



Flat plate about perpendicular axis
 $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

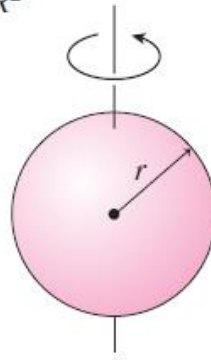


Thin rod about end
 $I = \frac{1}{3} ML^2$

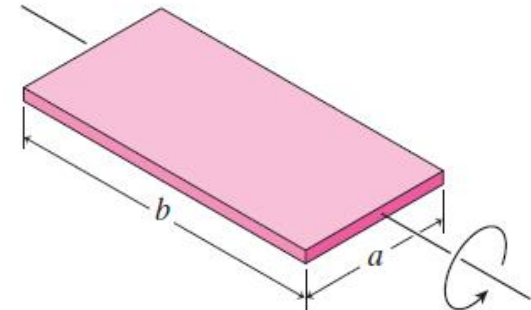


Disk or solid cylinder
about its axis
 $I = \frac{1}{2} MR^2$

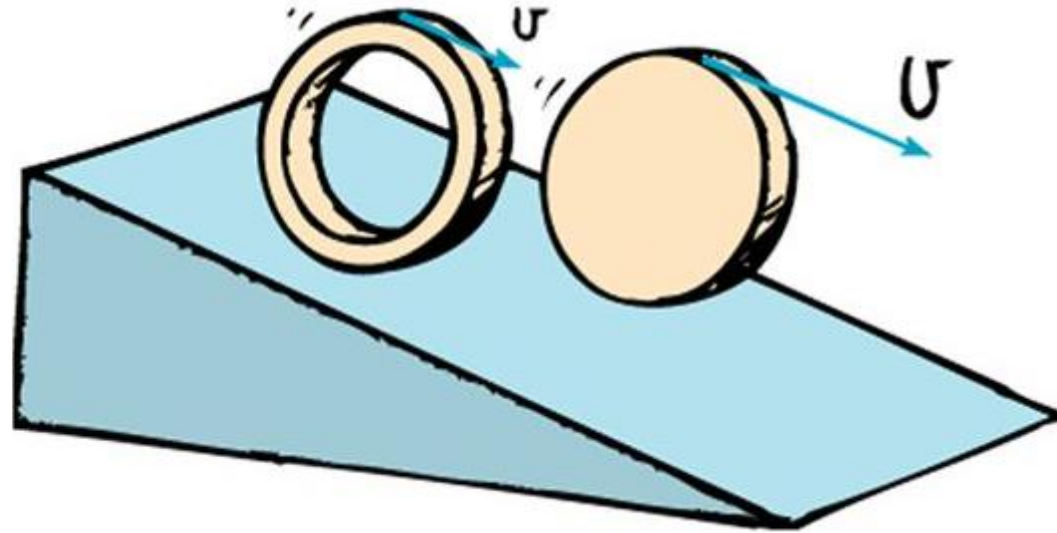
Hollow spherical shell about diameter
 $I = \frac{2}{3} MR^2$

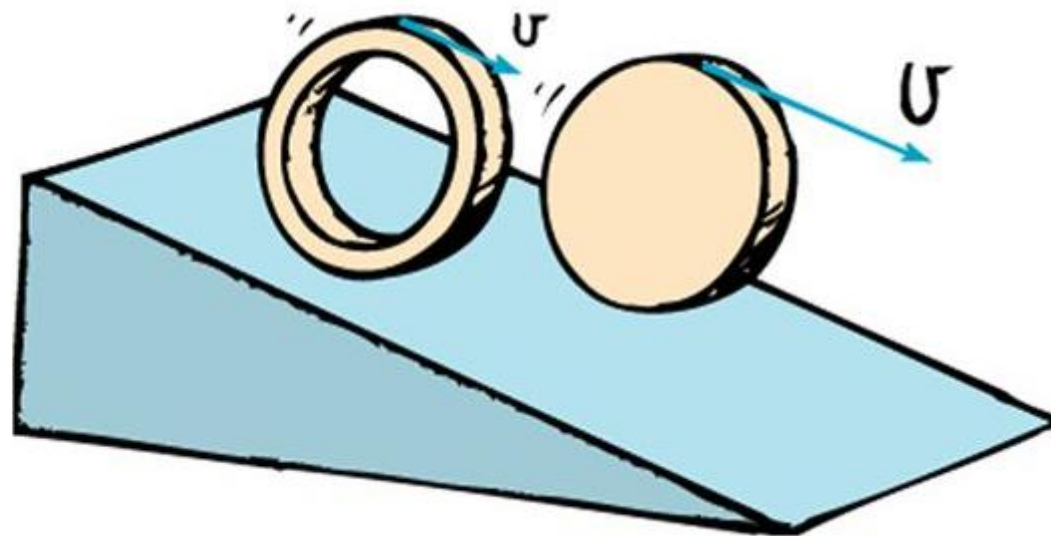


Flat plate about central axis
 $I = \frac{1}{12} Ma^2$



سؤال : یک دیسک و یک حلقه با جرم و شعاع یکسان را از بالای یک سطح شیبدار رها می کنیم . کدام یک زودتر به پایین سطح می رسند؟





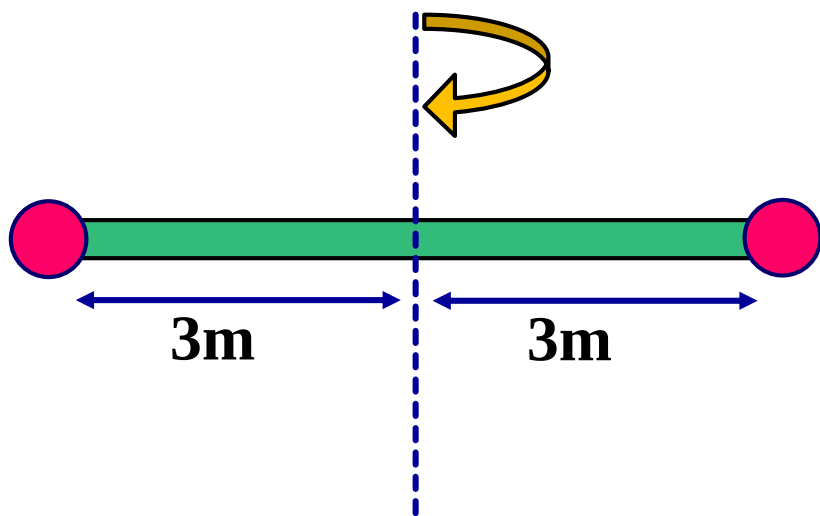
جواب : گشتاور لختی دیسک $\frac{1}{2}mR^2$ است ولی گشتاور لختی حلقه mR^2 است.
پس گشتاور لختی دیسک کمتر بوده و زودتر می رسد.

مثال : در شکل زیر دو ذره هر یک به جرم 1kg به وسیله ی یک میله ی باریک به طول 6m و جرم 2kg به محور چرخش متصل شده است :

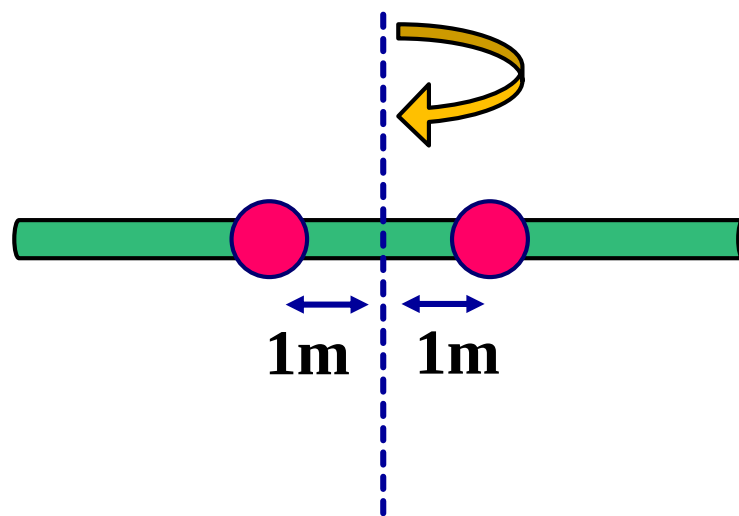
(الف) لختی دورانی این مجموعه حول محوری که بر مرکز میله عمود است، در دو شکل الف و ب را محاسبه کنید.

(ب) با توجه به قسمت الف مشخص کنید چرخاندن کدام میله آسان تر است.

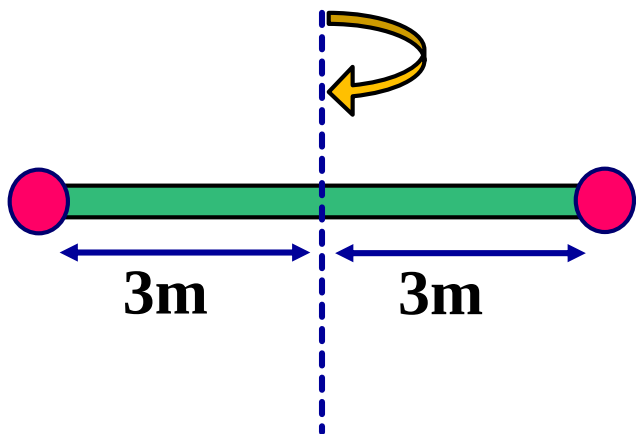
(الف)



(ب)



شکل الف :



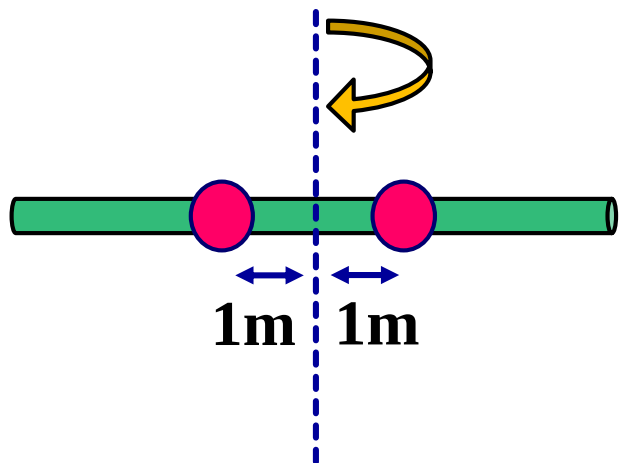
$$I_t = I_{\text{میله}} + I_{\text{ذرات}}$$

$$I_{\text{میله}} = \frac{1}{12} mL^2 = \frac{1}{12} (2)(6)^2 = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{ذرات}} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (1)(3)^2 + (1)(3)^2 = 18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_t = 6 + 18 = 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

شکل ب :



$$I_t = I_{\text{میله}} + I_{\text{ذرات}}$$

$$I_{\text{میله}} = \frac{1}{12} mL^2 = \frac{1}{12} (2)(6)^2 = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{ذرات}} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (1)(1)^2 + (1)(1)^2 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_t = 6 + 2 = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

✓ چرخاندن میله در حالت ب راحت تر است زیرا گشتاور لختی کل در این وضعیت کمتر است.

قضیه محورهای موازی :

فرض کنید بخواهیم گشتاور لختی جسمی به جرم m را نسبت به محور معینی پیدا کنیم با شرایط زیر :

✓ گشتاور لختی جسم نسبت به یک محور گذرنده از **مرکز جرم** جسم معلوم باشد.

✓ فاصله ی بین این محور و محور گذرنده از مرکز جرم h باشد.

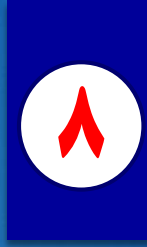
✓ این دو محور با هم **موازی** باشند.

در اینصورت طبق قضیه ی محورهای موازی داریم :

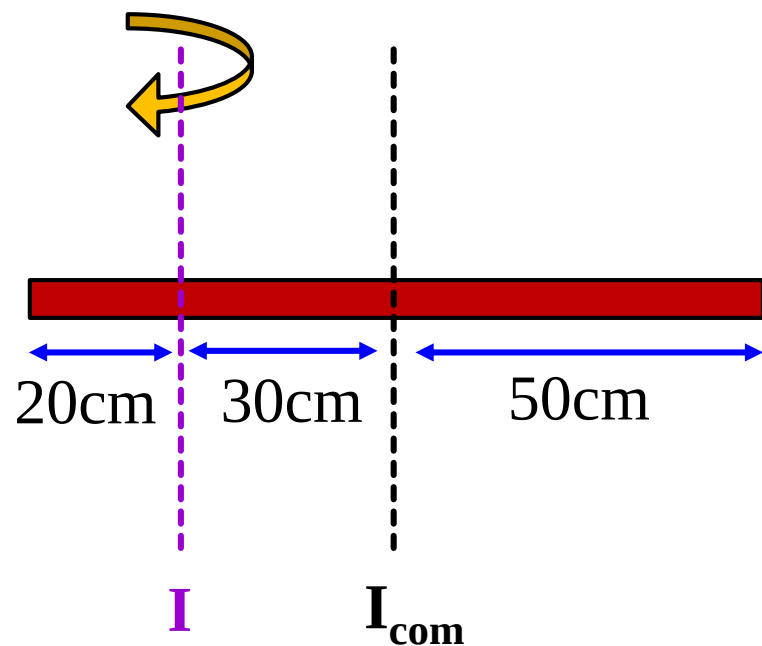
$$I = I_{com} + mh^2$$

گشتاور لختی نسبت به محور مورد نظر ← ← → فاصله دو محور

↓
گشتاور لختی نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم



مثال : لختی دورانی یک خط کش 1متری به جرم 0.6 kg نسبت به محور عمود بر خط کش و واقع بر روی علامت 20cm را محاسبه کنید.



حل :

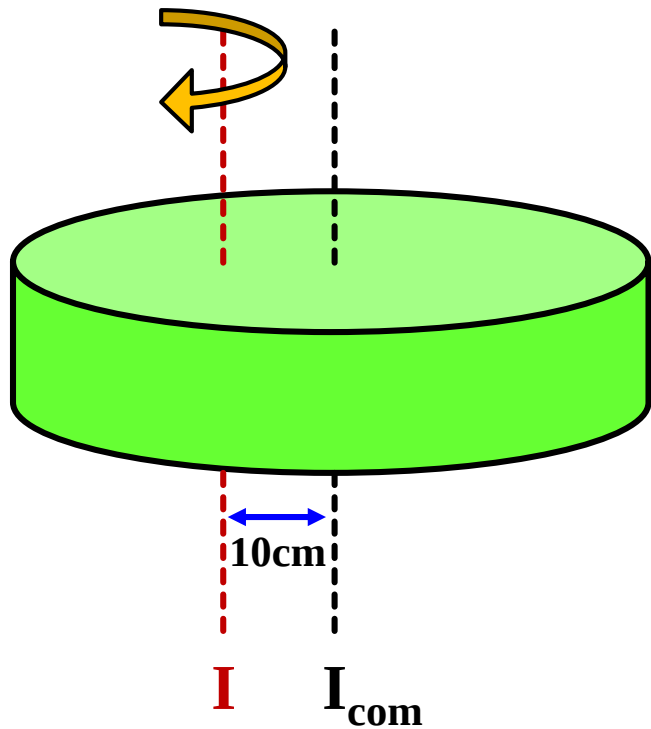
$$I_{com} = \frac{1}{12} mL^2 = \frac{1}{12} (0.6)(1)^2 = 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I = I_{com} + mh^2 \Rightarrow$$

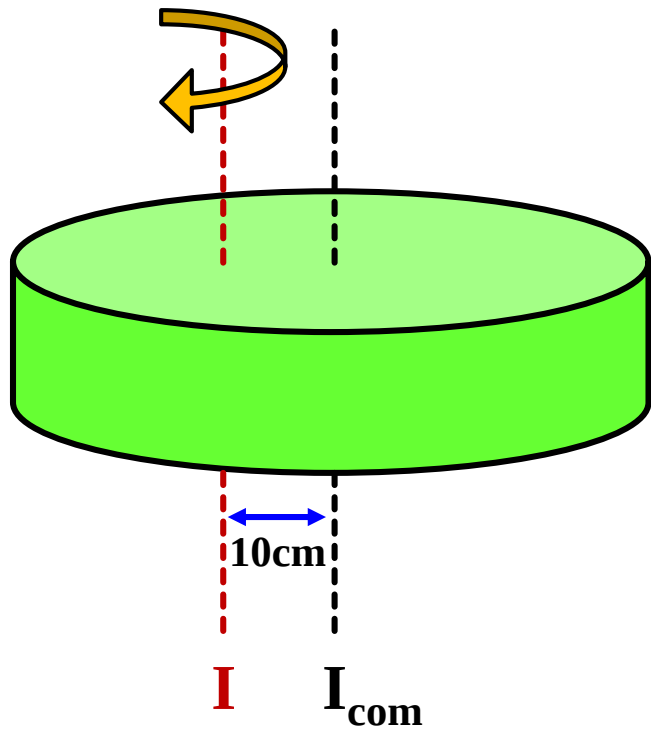
$$I = 0.05 + (0.6)(0.3)^2 \Rightarrow$$

$$I = 0.05 + 0.054 = 0.104 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

مثال : لختی دورانی دیسکی به جرم 0.2 kg و شعاع 30 cm را نسبت به محوری که به فاصله 10 cm از مرکز آن قرار دارد، محاسبه کنید.



مثال : لختی دورانی دیسکی به جرم 0.2 kg و شعاع 30 cm را نسبت به محوری که به فاصله ی 10 cm از مرکز آن قرار دارد، محاسبه کنید.



حل :

$$I_{com} = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} (0.2)(0.3)^2 = 0.009 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I = I_{com} + m h^2 \Rightarrow$$

$$I = 0.009 + (0.2)(0.1)^2 \Rightarrow$$

$$I = 0.009 + 0.004 = 0.013 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$