

بہ نام پکتا پروردگار مہربان

جلسہ دوم آموزش الکترونیکی ایستایی (۱) و محاسبات فنی (۱)

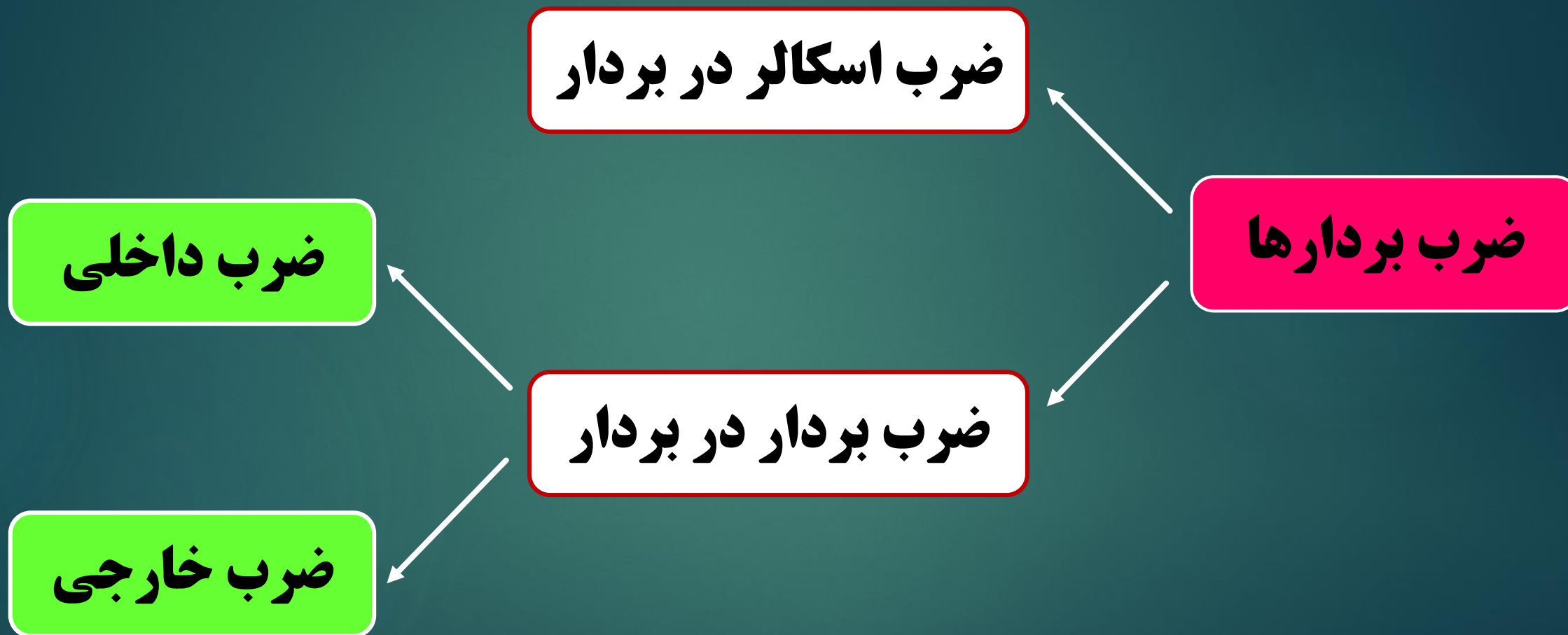
مدرس : عظیمہ ولایتی

آدرس وبسایت مدرس جهت :

✓ دانلود فایل های PDF

✓ ارسال حل تمرین ها

<http://velayati.professora.ir>



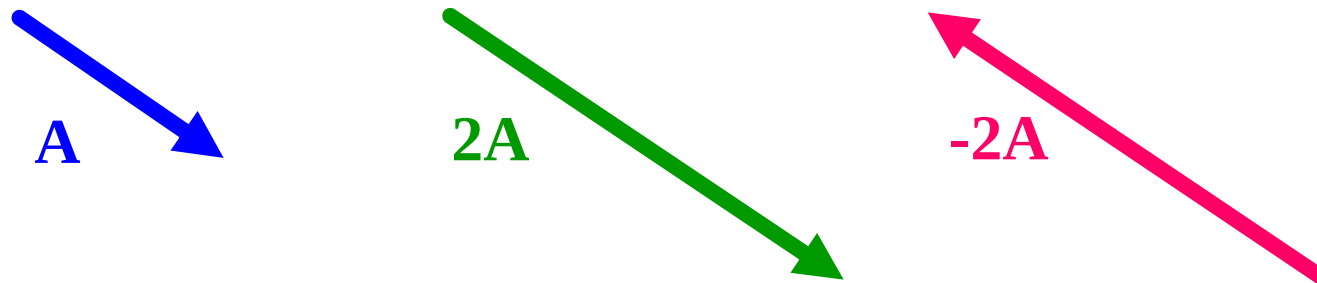
ضرب اسکالر در بردار :

حاصل ضرب عدد اسکالر m در بردار $\vec{A}$ برابر است با برداری که :

✓ هم جهت با $\vec{A}$ است اگر m مثبت باشد.

✓ خلاف جهت $\vec{A}$ است اگر m منفی باشد.

✓ بزرگی آن مساوی حاصل ضرب قدرمطلق m در بزرگی بردار $\vec{A}$ است.



مثال : دو بردار $\vec{A} = -3i + 4j$ را فرض کرده و موارد زیر را محاسبه کنید:

(الف) طول بردار A (ب) بردار $-2\vec{A}$ (ج) طول بردار $-2\vec{A}$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{(الف)}$$

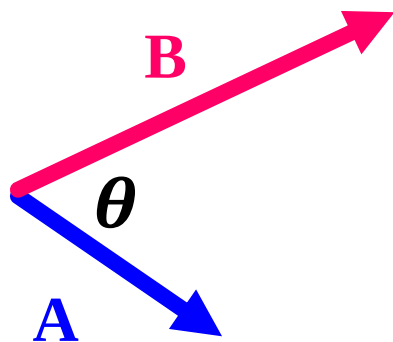
$$\vec{R} = -2\vec{A} = -2(-3\hat{i} + 4\hat{j}) = 6\hat{i} - 8\hat{j} \quad \text{(ب)}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{(ج)}$$

$$\vec{R} = -2\vec{A} \Rightarrow R = |-2|A = 2A$$

ضرب داخلی (اسکالر، نقطه ای) دو بردار :

الف) با استفاده از اندازه ی دو بردار و زاویه بین آن ها



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

زاویه بین دو بردار
اندازه بردار A
اندازه بردار B

ب) با استفاده از مولفه های متعامد

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \\ \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

✓ حاصل ضرب داخلی دو بردار، یک بردار نیست بلکه یک عدد (اسکالر) است.

✓ ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. یعنی :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

✓ ضرب داخلی دو بردار توزیع پذیر است. یعنی :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

✓ ضرب داخلی یک بردار در خودش برابر است با طول بردار به توان ۲. یعنی :

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

مثال : دو بردار A و B به ترتیب با بزرگی 10 و 6 با یکدیگر زاویه ی 60 درجه می سازند. حاصلضرب اسکالر این دو بردار را محاسبه کنید.

حل :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = (10)(6) \cos 60 = (60)(0.5) = 30$$

مثال : حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{A} = 5j$ و $\vec{B} = -2i + 4j$ را محاسبه کنید.

حل :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = (0)(-2) + (5)(4) = 20$$

مثال: زاویه ی بین دو بردار $\vec{A} = 3i - 4j$ و $\vec{B} = 2i + j$ را محاسبه کنید.

حل:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \simeq 2.2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = (3)(2) + (-4)(1) = 2$$

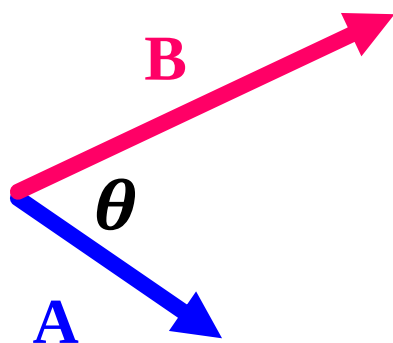
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \Rightarrow 2 = (5)(2.2) \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{(5)(2.2)} = \frac{2}{11} \simeq 0.18$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.18) \simeq 80^\circ$$

ضرب خارجی (برداري) دو بردار :



الف) با استفاده از اندازه ی دو بردار و زاویه بین آن ها



$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta$$

زاویه بین دو بردار
اندازه بردار A
اندازه بردار B

ب) با استفاده از مولفه های متعامد

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \\ \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

- ✓ حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار است.
- ✓ حاصل ضرب خارجی دو بردار که در صفحه XY قرار دارند، برداری است در امتداد محور Z .
- ✓ ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. یعنی :

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

- ✓ ضرب خارجی دو بردار توزیع پذیر است. یعنی :

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

- ✓ ضرب خارجی یک بردار در خودش برابر است با صفر.

مثال : سه بردار $\vec{A} = 2i + 4j$ و $\vec{B} = -i + 3j$ و $\vec{C} = 6i - 2j$ را در نظر گرفته و موارد زیر را محاسبه کنید:

(الف) حاصل $\vec{A} \times \vec{B}$

(ب) حاصل $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} = [(2)(-1) - (4)(3)] \hat{k} \\ &= (-2 - 12) \hat{k} = -14 \hat{k} \end{aligned} \quad \text{(الف)}$$

$$\vec{R} = \vec{B} + \vec{C} = 5i + j \quad \text{(ب)}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{R} = (A_x R_y - A_y R_x) \hat{k} = [(2)(1) - (4)(5)] \hat{k} = -18 \hat{k}$$