

# حرکت دورانی :

۱

در این بخش حرکت دورانی **خالص** جسم صلب حول یک محور ثابت، با **سرعت ثابت** را بررسی خواهیم کرد.



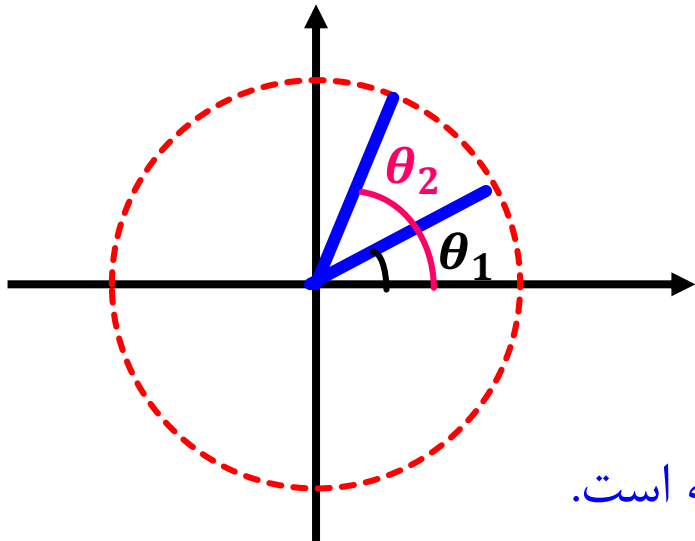
# آشنایی با برخی از مفاهیم مورد نیاز:

✓ **جسم صلب:** جسمی که شکل ثابتی دارد و اجزای آن نسبت به هم مکان ثابتی دارند.

✓ **محور دوران:** محوری که نسبت به جسم ثابت در نظر گرفته شده و جسم حول آن دوران می کند.

✓ **جابجایی زاویه ای:** اگر مطابق شکل زیر جسم حول محوری بچرخد و مکان زاویه ای جسم از  $\theta_1$

به  $\theta_2$  تغییر کند، جابجایی زاویه ای جسم برابر است با :



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

❖ واحد جابجایی زاویه ای رادیان (rad) است و هر رادیان حدود 57.3 درجه است.

✓ **سرعت زاویه ای متوسط :** نسبت جابجایی زاویه ای به زمان را سرعت زاویه ای گویند:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

جابجایی زاویه ای (rad) →  $\Delta\theta$  ← سرعت زاویه ای متوسط (rad/s)  
 زمان (S) →  $\Delta t$

✓ **بسامد چرخش :** تعداد دورهایی که جسم در واحد زمان (یک ثانیه) می زند را بسامد گویند که از

رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$f = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}$$

بسامد (1/S) یا هرتز (HZ) ←  $f$

✓ **دوره تناوب :** زمانی که طول می کشد تا جسم یک دور کامل بچرخد. دوره تناوب عکس بسامد چرخش است:

$$T = \frac{1}{f}$$

← دوره تناوب (S)
→ بسامد (HZ)

✓ **تعداد چرخش :** اگر جسم به اندازه  $\Delta\theta$  چرخیده باشد، تعداد دورهای چرخش از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

← تعداد چرخش
→ جابجایی زاویه ای (rad)

**مثال :** قرص دایره ای شکلی، حول محور مرکزی خود در حال چرخش است. مکان زاویه

ای قرص بر حسب زمان از معادله ی  $\theta = 2t^2 + 4t - 1$  بدست می آید.

**(الف)** مکان زاویه ای قرص در لحظات  $t_1=2s$  و  $t_2=3s$  را محاسبه کنید.

**(ب)** سرعت زاویه ای متوسط قرص در بازه ی زمانی  $t_1=2s$  و  $t_2=3s$  چقدر است؟

**حل :**

**(الف)**  $t_1 = 2s \Rightarrow \theta_1 = 2(2)^2 + 4(2) - 1 = 15rad$

$t_2 = 3s \Rightarrow \theta_2 = 2(3)^2 + 4(3) - 1 = 29rad$

**(ب)** 
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{29 - 15}{3 - 2} = \frac{14}{1} = 14 \quad rad / s$$

**مثال :** جسمی در حال چرخش است. مکان زاویه ای جسم بر حسب زمان از معادله ی  $\theta = t^2 - 5t$  بدست می آید.

**الف)** در چه لحظه ای از زمان مکان زاویه ای جسم برابر صفر است؟

**ب)** پس از گذشت 6 ثانیه، مشخص کنید جسم چند دور کامل چرخیده است؟ ( $\pi = 3$ )

**مثال :** جسمی در حال چرخش است. مکان زاویه ای جسم بر حسب زمان از معادله ی  $\theta = t^2 - 5t$  بدست می آید.

**(الف)** در چه لحظه ای از زمان مکان زاویه ای جسم برابر صفر است؟

**(ب)** پس از گذشت 6 ثانیه، مشخص کنید جسم چند دور کامل چرخیده است؟ ( $\pi = 3$ )

**حل :**

$$\text{(الف)} \quad \theta = t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t(t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5s \end{cases}$$

$$\text{(ب)} \quad \theta = t^2 - 5t \xrightarrow{t=6s} \theta = (6)^2 - 5(6) = 6 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{6}{2(3)} = 1$$



**مثال :** در یک حرکت چرخشی یکنواخت، جسم در مدت 30 ثانیه، 120 دور می زند:

**(الف)** دوره تناوب حرکت چند ثانیه است؟

**(ب)** بسامد چرخش چند هرتز است؟

**حل :**

**(الف)**

$$\frac{30S}{T} = \frac{120}{1} \Rightarrow T = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0.25S$$

**(ب)**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25} = 4Hz$$



**مثال :** سرعت زاویه ای چرخ  $2\text{rad/s}$  است. این چرخ در مدت 5 ثانیه چند دور کامل می چرخد؟

# انرژی جنبشی چرخشی :

انرژی جنبشی جسمی که حول یک محور ثابت در حال دوران است از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

سرعت زاویه ای (rad/s)  $\rightarrow$   $K$   $\leftarrow$  انرژی جنبشی (J)  
 $\downarrow$   
 گشتاور لختی (kg.m<sup>2</sup>)

**گشتاور لختی (لختی دورانی) :** مقاومت جسم در برابر تغییر حالت در حرکت چرخشی است.

✓ هرچه لختی دورانی جسم بیشتر باشد، دوران جسم دشوارتر است.

# محاسبه گشتاور لختی برای دستگاهی از ذرات گسسته :

برای دستگاهی متشکل از  $n$  ذره به جرم های  $m_1, m_2, \dots, m_n$  که در حال دوران حول محور ثابتی هستند، گشتاور لختی به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\leftarrow I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

گشتاور لختی ( $\text{kg.m}^2$ )

جرم ذره  $i$  ام ( $\text{kg}$ )

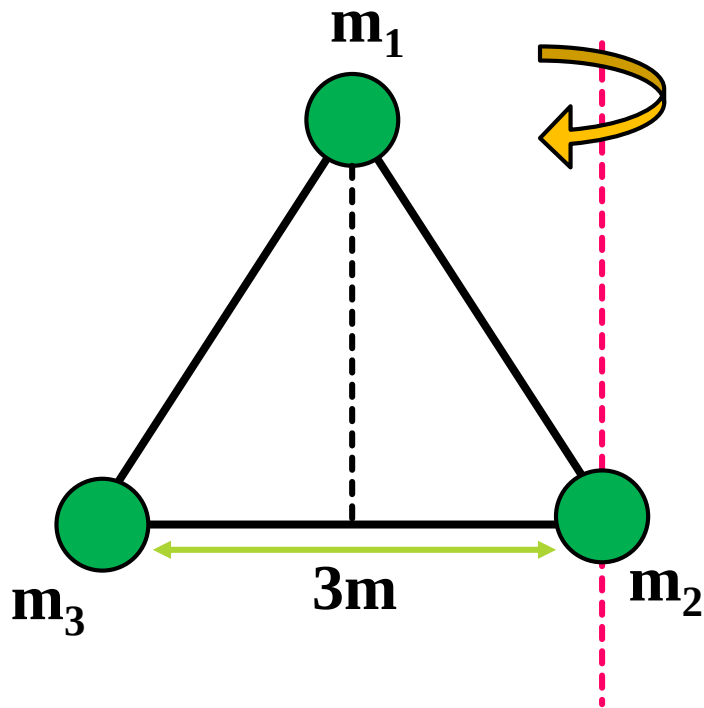
فاصله عمودی ذره  $i$  ام تا محور دوران ( $\text{m}$ )

**مثال :** در شکل زیر سه ذره هر یک به جرم  $1\text{kg}$  در سه راس یک مثلث متساوی

الاضلاع قرار گرفته اند. اگر جرم میله های متصل کننده ذرات ناچیز باشد، لختی دورانی

این مجموعه حول محور نشان داده شده محاسبه کنید.

**حل :**



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \Rightarrow$$

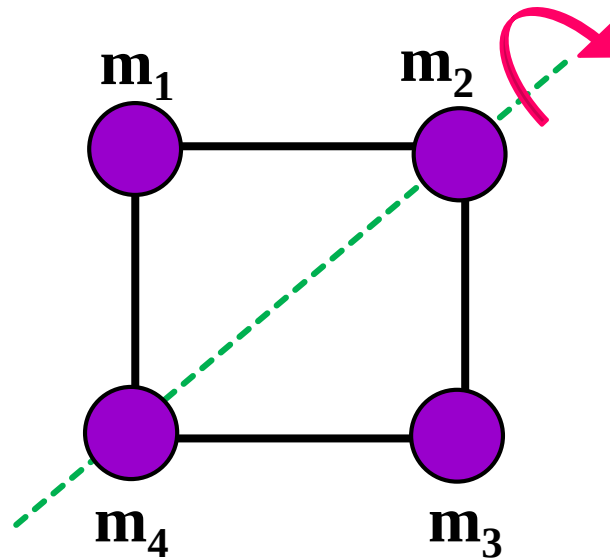
$$I = (1)(1.5)^2 + (1)(0) + (1)(3)^2$$

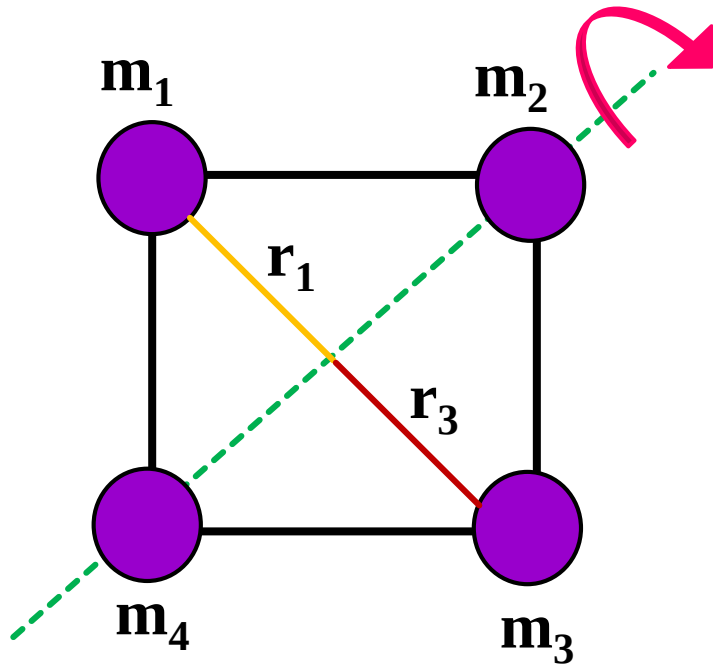
$$I = 2.25 + 9 = 11.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**مثال :** در شکل زیر جرم هر ذره  $0.5\text{kg}$  و جرم میله های متصل کننده ذرات ناچیز است. اگر ضلع مربع  $2\text{m}$  باشد،

**(الف)** لختی دورانی این مجموعه حول محوری که از قطر مربع می گذرد را محاسبه کنید.

**(ب)** اگر سرعت زاویه ای مجموعه  $0.01\text{ rad/s}$  باشد، انرژی جنبشی چرخشی مجموعه را محاسبه کنید.





$$r_1 = r_3 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}m$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 \Rightarrow$$

$$I = (0.5)(\sqrt{2})^2 + (0.5)(0) + (0.5)(\sqrt{2})^2 + (0.5)(0)$$

$$I = 1 + 1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (2) (0.01)^2 = 0.0001 \text{ J}$$

حل :